MATEMATICAS 5

PROFESOR: FERNANDO INZUA

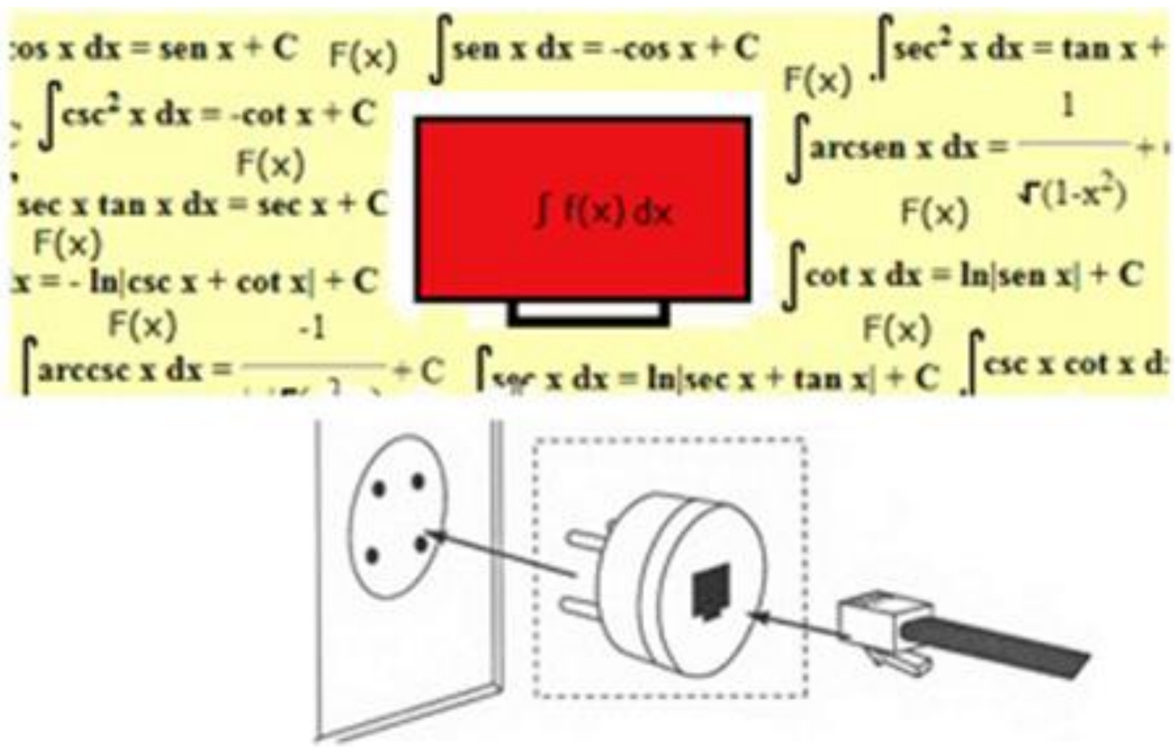
Plantel los reyes

Introducción

¿Cómo integrar una función mediante la obtención de funciones equivalentes?

Para las operaciones algebraicas, existe un algoritmo que permite obtener el resultado deseado; en el cálculo diferencial, la derivada posee su propio procedimiento a través del *método de los cuatro pasos*. Sin embargo, la integración de funciones no cuenta con un algoritmo único; “aunque se sabe que la integral de una expresión diferencial dada existe, puede ser imposible obtenerla en términos de funciones conocidas” (Granville, 1963).

Esta condición conlleva la necesidad de contar con diversas estrategias que ayuden a determinar la **antiderivada**; en algunos casos, los métodos de integración ofrecen una de las alternativas que permiten encontrar una solución exacta. Su relevancia se debe a que brindan la posibilidad de trasformar ciertas expresiones matemáticas en expresiones algebraicas equivalentes que pueden ser ubicadas en una de las múltiples tablas de integración para integrar la función estudiada de manera precisa. En este tema, conocerás algunas de estas opciones que ayudan a obtener de forma sistemática la integral de una función para algunos tipos de expresiones matemáticas.



El estudio de este tema te permitirá:

- Realizar la integración de algunos tipos de funciones, a través de transformaciones algebraicas.
- Detallar algunas estrategias de conversión y simplificación para obtener funciones equivalentes y advertir el papel de las tablas de integrales en la determinación de funciones primitivas, las cuales son un recurso definitivo para responder a diversos problemas relacionados con el cálculo integral.

- Determinar el área bajo una curva por medio de la regla de Barrow.

$$\int u \, d(v) = uv - \int v \, d(u) \quad (e.7)$$

$$f(x) = xe^x; \quad (E.1)$$

A partir de la expresión original a integrar, primero se selecciona “dv”; ésta debe ser una función fácil de integrar para que el método simplifique la integración original. Entonces, se tiene lo siguiente:**$dv = e^x\,dx$ (E.1.1); ver que esta función es directa en la tabla 1**

Integración por descomposición en fracciones

Entre los tipos de funciones susceptibles de simplificarse se encuentran los **cocientes de polinomios**, representados de la siguiente manera:

H(x) = f(x) / g(x), donde f(x) y g(x) son **polinomios de grados** “**n**” y “**m**”

Recuerda que un polinomio es una expresión matemática que posee la siguiente forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 \quad (11)$$

Donde “ai” son constantes y “ni” son números naturales

Las expresiones del tipo "H(x)" se clasifican como *funciones propias*, denominadas como "$H_p(x)$" si el grado del polinomio "f(x)" es menor que el grado de "g(x)", e *impropias*, denominadas como "$H_I(x)$" si el grado de "f(x)" es mayor que el de "g(x)". En la teoría algebraica de este campo se sabe lo siguiente:

a) Toda función racional impropia "HI(x)" se puede expresar, en teoría, como la suma de un polinomio "P(x)" y una función propia "$H_P(x)$":

$H_I(x) = P(x) + H_P(x)$ (e.8)

b) Toda función racional propia "$H_P(x)$" se puede expresar, en teoría, como suma de funciones simples con denominadores "g(x)" de la forma "$(ax + b)^n$" y "$(a^{x2} + bx + c)^n$", donde "n" es un número entero y positivo:

$H_P(x) = A / (ax \pm b) + \ldots + N / (ax \pm b)^n + Ax + B / (a^{x2} + bx + c) + \ldots + Mx + B / (a^{x2} + bx + c)^n$ (e.9)

Al revisar los incisos anteriores se observa que, a partir del primero ("a"), hay un polinomio más una función propia donde P(x) es el precedente, sujeto de integración directa o por medio de las **tablas de integrales para funciones algebraicas**; para ambos incisos ("a" y "b"), hay una parte relacionada con una función propia.

Para la simplificación de las expresiones propias "$H_P(x)$", se parte de la forma del denominador y pueden hallarse cuatro diferentes enfoques de solución que pueden revisarse con mayor amplitud en la bibliografía; en este tema, sólo se ejemplificará la simplificación que ofrece la técnica de integración por descomposición de fracciones para un caso específico. La finalidad de esto es mostrar las bondades de aplicación de esta metodología.

Ejemplo 2. Integrar la siguiente expresión:

$$\int dx /(x^2 - 4)\, dx \quad (E.2)$$

Pulsa las flechas para avanzar y retroceder por el procedimiento.

Al observar la integral (E.2) y compararla con los diferentes incisos de la tabla 1 de integración, se aprecia que ninguno se identifica con la expresión (E.2) ni puede funcionar como entrada para resolver directamente la integración propuesta:

Es importante resaltar que el esfuerzo algebraico realizado en el desarrollo de este método tiene su recompensa en el hecho de poder transformar una expresión que no se puede integrar directamente en un par de expresiones equivalentes que son integrables a través de las tablas básicas de integración para obtener la solución exacta de la integral planteada (E.2.13). Cabe recordar que la interpretación de cada resultado obtenido depende del contexto de donde proviene el problema abordado.

$$\int_{a}^{b} f(x)\,(dx) = F(b) - F(a) \qquad (e,10)$$

$$\int_{0}^{1} x^2 \, dx \qquad (E.3)$$

$$\int x^2 (dx) = x^3 / 3 + C = F(x) \quad (E.3.1)$$

Conclusión

Como se comentó anteriormente, la necesidad de resolver una integral no es una curiosidad matemática; la antiderivada como función inversa y la interpretación geométrica del área bajo una curva, con la posibilidad de evaluarla mediante la regla de Barrow, ayudan a resolver una gran variedad de problemas como la determinación del coeficiente de desigualdad para distribución de ingreso, la evaluación del superávit consumidor-productor, la determinación del centro de gravedad, el valor promedio de una función, entre otros casos prácticos. De esta manera, la necesidad de obtener la primitiva de una función es imperante para dar respuesta a las interrogantes relacionadas.

Sin embargo, al no existir un algoritmo general para realizar la integración, se requiere utilizar los diversos recursos disponibles en el álgebra y la geometría, entre otras ramas de esta ciencia, para transformar expresiones matemáticas complejas a formas equivalentes más manejables, es decir, que puedan identificarse para su solución en las diversas tablas de integración. Es aquí donde los métodos de integración toman su justa medida de aplicación.

(s. a.) (2006). *Runners* [fotografía]. Tomada de https://pixabay.com/en/runners-silhouettes-athletes-635906/

El cálculo integral está presente de manera sutil en una variedad de escenarios de la vida cotidiana; conocer la forma en que esto ocurre permite aprovechar al máximo el potencial de análisis que ofrece esta disciplina a través de sus recursos matemáticos.

Actividad de aprendizaje 1. Aplicaciones de la integral: métodos de integración y determinación del valor promedio de una función

Existen diversos parámetros de interés en distintos campos de las ciencias y la tecnología que versan sobre valores equivalentes asociados a una superficie o volumen; de esta manera, se hallan conceptos como el centro de masa o el valor promedio de una función, cuya definición los relaciona con procesos de integración.

En esta actividad, analizarás los enunciados que se te presentan y seleccionarás el método de integración para resolver algunos ejercicios.

Lee los siguientes enunciados y determina si son verdaderos o falsos al pulsar el alveolo correspondiente. Al finalizar, podrás conocer tu desempeño.

Métodos de integración

Se entiende por **método de integración** a la integral de las diferentes técnicas elementales usadas (a veces de forma combinada) para calcular una antiderivada o integral indefinida de una función. Así, dada una función *f*(x), un método de integración nos permite encontrar otra función *F*(x) tal que:

,

lo cual, por el teorema fundamental del cálculo equivale a hallar una función *F*(x) tal que *f*(x) sea su derivada:[n 1]

integración de fracciones racionales .

Introdución

Dedicamos esta página exclusivamente a la integración de funciones racionales. Es decir, a la resolución de integrales cuyos integrandos son cocientes de **polinomios**.

Algunas de las integrales que se resuelven no son de este tipo hasta aplicarles un cambio de variable.

Además, no incluimos las integrales cuyo resultado es un logaritmo. Esto es, las integrales en las que el numerador del integrando puede escribirse como la derivada del denominador y, por tanto, su resolución es inmediata. Por ejemplo,

∫x1+x2dx=12·ln|1+x2|+C∫x1+x2dx=12·ln|1+x2|+C

Existen básicamente tres tipos de integrales de funciones racionales según el tipo del integrando. Cada uno de estos tipos tiene su propio método de resolución. Los explicaremos a continuación.

Finalmente, puesto que pretendemos que este texto también resulte útil para un nivel universitario, **advertimos al lector** de que la descripción de los métodos es bastante técnica. No obstante, únicamente trabajaremos con los métodos que se estudian en bachillerato.

Método de resolución

Supongamos que tenemos la integral

∫P(x)Q(x)dx∫P(x)Q(x)dx

donde P(x)P(x) y Q(x)Q(x) son los polinomios del numerador y denominador, respectivamente.

Distinguimos los siguientes casos:

1. **grado(*P*) ≥≥ grado(*Q*):** efectuamos la división de los polinomios.
2. **grado(*P*) < grado(*Q*):**

   En este caso, aplicaremos el Teorema Fundamental del Álgebra. Subcasos:

- **Caso a:** Todas las raíces de Q son reales
- **Caso b: NO** todas las raíces de Q son reales

Caso 1: grado de *P* mayor o igual que el de *Q*

En este caso, el método consiste en **efectuar una división polinómica** para poder descomponer la integral.

Antes de efectuar la división de polinomios tenemos que **factorizar** los polinomios del numerador y denominador (expresarlos como productos de *(x - raíz)*) porque si tenemos algún mismo factor en el numerador y denominador podemos quitarlos (simplificar).

Si tenemos la integral

∫P(x)Q(x)dx∫P(x)Q(x)dx

Al efectuar la división tendremos que

P(x)=Q(x)·C(x)+R(x)P(x)=Q(x)·C(x)+R(x)

siendo *C(x)* el polinomio cociente y *R(x)* el polinomio resto de la división.

Si dividimos la expresión por *Q(x)* obtenemos

P(x)Q(x)=C(x)+R(x)Q(x)P(x)Q(x)=C(x)+R(x)Q(x)

De este modo, aplicando las propiedades de las integrales, habremos descompuesto la integral en la suma de dos integrales:

∫P(x)Q(x)dx=∫C(x)dx+∫R(x)Q(x)dx∫P(x)Q(x)dx=∫C(x)dx+∫R(x)Q(x)dx

Caso 2: grado de *P* menor que el de *Q*

Caso (a): todas las raíces de Q son reales

Podemos factorizar el polinomio QQ y escribirlo como

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_n)^{k_n}$$

donde cada aiai son las raíces (reales) de QQ y kiki es el grado de multiplicidad de la raíz aiai, esto es, el número de veces que se repite la raíz.

Nota: estamos suponiendo, por comodidad, que los polinomios son mónicos, es decir, que tienen 1 como coeficiente director.

Si es necesario, para buscar las raíces de los polinomios podemos aplicar la regla de Ruffini.

Según el Teorema Fundamental del Álgebra, podemos expresar el cociente P(x)/Q(x)P(x)/Q(x) como una suma de cocientes a los que denominamos **fracciones simples**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}} =$$

$$= \frac{b_1^1}{(x-a_1)} + \frac{b_2^1}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{b_{k_1}^1}{(x-a_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{b_1^2}{(x-a_2)} + \frac{b_2^2}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{b_{k_2}^2}{(x-a_2)^{k_1}} + \cdots +$$

$$+ \frac{b_1^n}{(x-a_n)} + \frac{b_2^n}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{b_{k_1}^n}{(x-a_n)^{k_1}}$$

donde los términos bjibij son reales y cuyos valores desconocemos. Tendremos que buscarlos dando valores a x.

Caso (b): NO todas las raíces de Q son reales

Factorizamos el denominador, QQ, obteniendo una expresión como la siguiente

$$\begin{aligned} Q(x) = {} & (x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_n)^{k_n}\cdot \\ & \cdot\big(x-(\alpha_1+\beta_1 i)\big)^{q_1}\cdots\big(x-(\alpha_m+\beta_m i)\big)^{q_m}\cdot \\ & \cdot\big(x-(\alpha_1-\beta_1 i)\big)^{q_1}\cdots\big(x-(\alpha_m-\beta_m i)\big)^{q_m} \end{aligned}$$

donde aiai son las raíces reales de QQ con multiplicidades kiki y aj+iβjaj+iβj son las raíces complejas con multiplicidades qjqj.

Nota: si un complejo z=a+iβz=a+iβ es raíz de un polinomio, entonces, su conjugado ¯z=aj−iβjz¯=aj−iβj también lo es y, además, tienen la misma multiplicidad.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, podemos escribir el cociente P(x)/Q(x)P(x)/Q(x) como sigue

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) +$$

$$+ \frac{m_1^1 x + n_1^1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1} + \frac{m_1^2 x + n_1^2}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1]^2} + \cdots + \frac{m_1^{q_1} x + n_1^{q_1}}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1]^{q_1}} +$$

$$+ \frac{m_2^1 x + n_2^1}{(x-\alpha_2)^2 + \beta_2} + \frac{m_2^2 x + n_2^2}{[(x-\alpha_2)^2 + \beta_2]^2} + \cdots + \frac{m_2^{q_2} x + n_2^{q_2}}{[(x-\alpha_2)^2 + \beta_2]^{q_2}} + \cdots +$$

$$+ \frac{m_m^1 x + n_m^1}{(x-\alpha_m)^2 + \beta_m} + \frac{m_m^2 x + n_m^2}{[(x-\alpha_2)^2 + \beta_2]^2} + \cdots + \frac{m_m^{q_m} x + n_m^{q_m}}{[(x-\alpha_m)^2 + \beta_m]^{q_m}}$$

donde mjimij y njinij son constantes reales que desconocemos.

Nota: no debe confundirse el suníndice mm (número de raíces complejas del polinomio) con las constantes mjimij.

El polinomio R(x)R(x) es la suma de fracciones simples asociada a las raíces reales que ya sabemos cómo escribir (caso anterior) y que hemos omitido para simplificar la notación.

Obsérvese que se trata del mismo procedimiento aunque las fracciones simples asociadas a las raíces complejas tienen otra forma.

Debemos calcular las constantes mjimij y njinij. Para ello, multiplicamos la igualdad anterior por la factorización de QQ y damos valores a xx para obtener un sistema lineal de ecuaciones. Una vez calculadas, podremos expresar la integral como una suma de integrales simples.

Integral 1

$$\int \frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} dx$$

Solución

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, dividimos los polinomios:

$$\begin{array}{l|l} 2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10 & x^2 - 5 \\ \hline \underline{2x^5 - 10x^3} & 2x^3 - 2 \\ \qquad\quad -2x^2 + 10 & \\ \qquad\quad \underline{-2x^2 + 10} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Por tanto, podemos escribir el dividendo como el producto del divisor y del cociente (más el resto, que es 0)

$$2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10 =$$

$$= (x^2 - 5)(2x^3 - 2) + 0$$

Dividiendo entre el polinomio cociente, podemos escribir la fracción de polinomios como un polinomio de grado 3:

$$\frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} = 2x^3 - 2$$

De este modo, la integral es

$$\int \frac{2x^5 - 10x^3 - 2x^2 + 10}{x^2 - 5} dx =$$

$$= \int (2x^3 - 2) dx = \frac{2x^4}{4} - 2x =$$

$$= \frac{x^4}{2} - 2x + C$$

Integral 2

$$\int \frac{1}{x^2 + 3} dx$$

Solución

El grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, así que no podemos dividir los polinomios.

En un principio, aplicaríamos el Teorema Fundamental del Álgebra pero, por la forma del integrando, podemos transformarlo en la derivada de un *arctan*. Operamos un poco:

$$\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3\cdot\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} =$$

$$= \frac{1/3}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Por tanto, la integral que queda es inmediata:

$$\int \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Integral 3

$$\int \frac{5x-2}{x(x-2)}dx$$

Solución

Al ser el grado del polinomio del denominador mayor que el del numerador, aplicamos el Teorema Fundamental del Álgebra para expresar el cociente como una suma de fracciones simples:

$$\frac{5x-2}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)}$$

Para obtener las constantes *A* y *B*, damos valores a *x* en la igualdad anterior. Es suficiente con comprobar que los numeradores sean iguales ya que los denominadores son iguales:

$$5x - 2 = A(x-2) + Bx$$

$$x = 0 \;\rightarrow\; -2 = -2A \;\rightarrow\; A = 1$$

$$x = 1 \;\rightarrow\; 3 = -A + B \;\rightarrow\; B = 4$$

Luegopodemos escribir la integral como una suma y, aplicando sus propiedades, como una suma de integrales:

$$\int \frac{5x-2}{x(x-2)}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{4}{x-2}dx =$$

$$= \ln|x| + 4\ln|x-2| + C$$

Nota: el argumento de un logaritmo debe ser un valor absoluto, excepto que éste sea siempre positivo (por ejemplo, si es x2x2).

ntegral 4

$$\int \frac{2x^2+1}{(x-3)^2}dx$$

Solución

Desarrollamos el denominador:

$$\frac{2x^2+1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2+1}{x^2-6x+9}$$

Como los grados de los polinomios son el mismo, dividimos los polinomios:

$$\begin{array}{ll} 2x^2+1 & \underline{|\; x^2-6x+9} \\ \underline{2x^2-12x+18} & \quad 2 \\ \quad 12x-17 & \end{array}$$

Escribimos el dividendo como el producto del divisor por el cociente más el resto:

$$2x^2+1 = 2(x^2-6x+9) + (12x-17)$$

Al dividir en ambos lados por el divisor se obtiene una suma:

$$\frac{2x^2+1}{x^2-6x+9} = 2 + \frac{12x-17}{x^2-6x+9}$$

Escribimos la integral como la suma de la integral de una constante y la integral de un cociente de polinomios:

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2-6x+9}dx = \int 2\,dx + \int \frac{12x-17}{x^2-6x+9}dx$$

La primera de las integrales es inmediata. La segunda es un cociente de polinomios. Puesto que el grado del denominador es mayor, buscamos sus raíces para aplicar el Teorema Fundamental del Álgebra y expresar el cociente como suma de fracciones simples. Ya sabemos que

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2$$

Es decir, tenemos una raíz real doble y ninguna raíz compleja. Así pues, la descomposición en fracciones simples es de la forma

$$\frac{12x-17}{x^2-6x+9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$$

Para obtener las constantes, damos valores a *x* en la siguiente igualdad

$$12x-17 = A(x-3)+B$$

$$x=3 \;\rightarrow\; 19 = B$$

$$x=0 \;\rightarrow\; -17 = -3A+19 \;\rightarrow\; A = 12$$

Esta descomposición nos permite descomponer la integral en una suma de integrales:

$$\int \frac{12x-17}{x^2-6x+9}dx = 12\int \frac{1}{x-3}dx + 19\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

Ambas integrales son inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3|$$

$$\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = -\frac{1}{x-3}$$

Luego el resultado de la integral inicial es

$$\int \frac{2x^2+1}{(x-3)^2}\,dx = \int 2\,dx + \int \frac{12x-17}{x^2-6x+9}\,dx =$$

$$= 2x + 12\int \frac{1}{x-3}\,dx + 19\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx =$$

$$= 2x + 12\ln|x-3| - \frac{19}{x-3} + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx$$

Solución

Como el grado de los polinomios del numerador y del denominador son el mismo, dividimos los polinomios:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & \underline{\;x^2+3\;} \\ \underline{x^2+3} & \;1 \\ \quad\; -3 & \end{array}$$

Por tanto, podemos escribir el numerador como

$$x^2 = (x^2+3)\cdot 1 - 3$$

De donde obtenemos la descomposición del cociente en una suma:

$$\frac{x^2}{x^2+3} = 1 - \frac{3}{x^2+3}$$

Escribimos la integral como una suma de integrales:

$$\int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx = \int \left(1 - \frac{3}{x^2+3}\right) dx \ =$$

$$= x - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\int \frac{x^5 - x^2}{x^3 - 2x}\,dx$$

Solución

Nota: podemos simplificar el integrando:

5−x2x3−2x=x4−xx2−25−x2x3−2x=x4−xx2−2

Aunque nosotros no lo hemos hecho porque en este procedimiento no cambia demasiado.

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, dividimos los polinomios:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^5 & & -x^2 & \ x^3 - 2x \\ \cline{4-4}
\underline{x^5 - 2x^3} & & & \ x^2 + 2 \\
 & 2x^3 & -x^2 & \\
 & \underline{2x^3} & \underline{\quad -4x} & \\
 & & -x^2 + 4x &
\end{array}$$

Esto nos permite escribir el cociente como una suma de fracciones más simples:

$$x^5 - x^2 = (x^3 - 2x)(x^2 + 2) + (4x - x^2)$$

$$\frac{x^5 - x^2}{x^3 - 2x} = x^2 + 2 + \frac{4x - x^2}{x^3 - 2x}$$

Así, podemos descomponer la integral como una suma de integrales:

$$\int \frac{x^5 - x^2}{x^3 - 2x} dx = \int (x^2 + 2) dx + \int \frac{x(4 - x)}{x(x^2 - 2)} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x + \int \frac{4 - x}{x^2 - 2} dx$$

El grado del polinomio del denominador de la integral que queda es mayor que el del numerador. Buscamos las raíces del denominador:

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow \ x = \pm\sqrt{2}$$

Como las raíces son reales, por el Teorema Fundamental del Álgebra, podemos escribir el cociente como una suma de dos fracciones simples:

$$\frac{4 - x}{x^2 - 2} = \frac{A}{x - \sqrt{2}} + \frac{B}{x + \sqrt{2}} \quad \rightarrow$$

$$\frac{4 - x}{x^2 - 2} = \frac{A\left(x + \sqrt{2}\right) + B(x - \sqrt{2})}{\left(x - \sqrt{2}\right)(x + \sqrt{2})}$$

Damos valores a *x* en la igualdad para determinar las constantes *A* y *B*:

$$4 - x = A\left(x + \sqrt{2}\right) + B(x - \sqrt{2})$$

$$x = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 4 - \sqrt{2} = 2A\sqrt{2} \quad \rightarrow$$

$$A = \frac{4 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{4} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 4 + \sqrt{2} = -2B\sqrt{2} \quad \rightarrow$$

$$B = -\frac{4 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2} + 2}{4} = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Por tanto, la descomposición del cociente es

$$\frac{4 - x}{x^2 - 2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{2}}$$

Luego el resultado de la integral inicial es

$$\int \frac{x^5 - x^2}{x^3 - 2x} dx = \frac{x^3}{3} + 2x +$$

$$+ \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \ln |x - \sqrt{2}| -$$

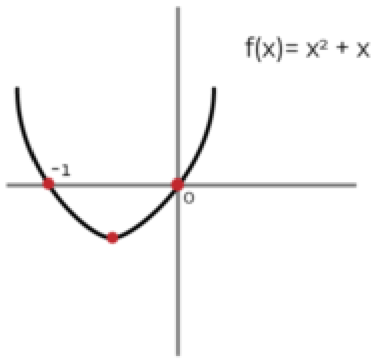
$$- \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \ln |x + \sqrt{2}| + C$$

Constante de integración: significado, cálculo y ejemplos

La **constante de integración** es un valor agregado al cálculo de las antiderivadas o integrales, sirve para representar las soluciones que conforman la primitiva de una función. Expresa una ambigüedad inherente donde cualquier función cuenta con un número infinito de primitivas.

Por ejemplo si se toma la función: $f(x) = 2x + 1$ y conseguimos su antiderivada:

$\int(2x+1)\, dx = x^2 + x + \mathbf{C}$; Donde **C** es la **constante de integración** y representa gráficamente la traslación vertical entre las infinitas posibilidades de la primitiva. Es correcto decir que ($x^2 + x$) es **una** de las primitivas de $f(x)$.

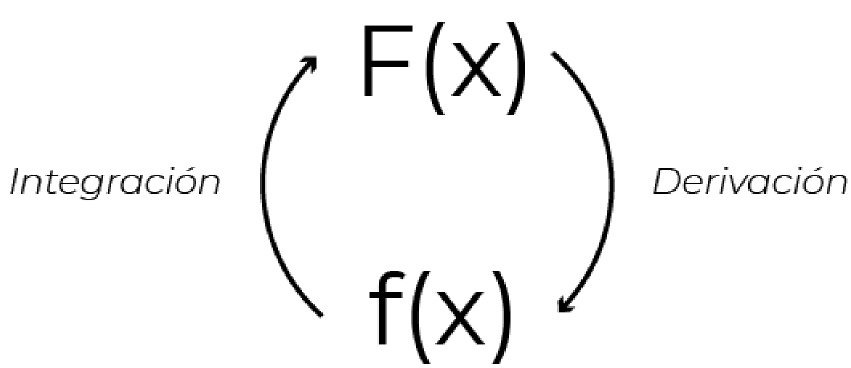


-

De igual manera se puede definir a ($x^2 + x +$ **C**) como la primitiva de f(x).

Propiedad inversa

Se puede notar que al derivar la expresión ($x^2 + x$) se obtiene la función $f(x) = 2x + 1$. Esto se debe a la propiedad inversa existente entre la derivación e integración de funciones. Dicha propiedad permite obtener fórmulas de integración partiendo desde la diferenciación. Lo cual permite la verificación de integrales mediante las mismas derivadas.



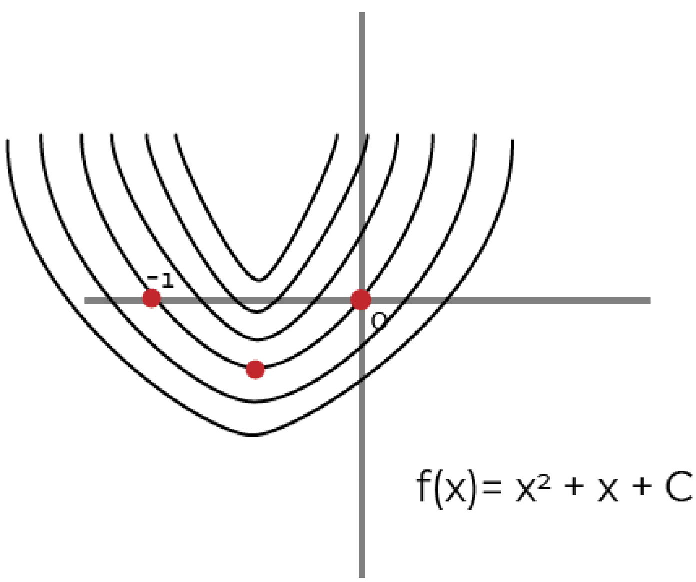
-

Fuente: autor

Sin embargo ($x^2 + x$) no es la única función cuya derivada es igual a (2x + 1).

1. *d* ($x^2 + x$)/ dx = 2x + 1
2. *d* ($x^2 + x + 1$)/ dx = 2x + 1
3. *d* ($x^2 + x + 2$)/ dx = 2x + 1
4. *d* ($x^2 + x + 3$)/ dx = 2x + 1
5. *d* ($x^2 + x +$ **C**)/ dx = 2x + 1

Donde 1, 2, 3 y 4 representan primitivas particulares de f(x) = 2x + 1. Mientras que 5 representa la integral indefinida o primitiva de f(x) = 2x + 1.



-

Fuente: autor

Las primitivas de una función se consiguen mediante el proceso de antiderivación o integral. Donde F será una primitiva de f si se cumple lo siguiente

- $y = \int f(x)dx = F(x) + C$; C = **constante de integración**
- $F'(x) = f(x)$

Se aprecia que una función posee una sola derivada, a diferencia de sus infinitas primitivas resultantes de la integración.

La integral indefinida

$\int f(x)dx = F(x) + C$

Corresponde a una familia de curvas con el mismo patrón, que experimentan incongruencia en el valor de las imágenes de cada punto (x , y). Cada función que cumpla con este patrón será una primitiva individual y al conjunto de todas las funciones se le conoce como **integral indefinida.**

El valor de la **constante de integración** será el que diferencie cada función en la práctica.

La **constante de integración** sugiere un desplazamiento vertical en todas las gráficas que representan a las primitivas de una función. Donde se observa el paralelismo entre ellas, y el hecho de que **C** es el valor del desplazamiento.

Según las practicas comunes la **constante de integración** se denota con la letra "C" posterior a un sumando, aunque en la práctica es indiferente si la constante se suma o resta. Su valor real puede ser encontrado en diversas formas según distintas **condiciones iniciales**.

Otros significados de la constante de integración

Ya se habló de como la **constante de integración** es aplicada en la rama del **cálculo integral**; Representando una familia de curvas que definen la integral indefinida. Pero muchas otras ciencias y ramas han asignado valores muy interesantes y prácticos de la **constante de integración,** que han facilitado el desarrollo de múltiples estudios.

En la **física** la constante de integración puede tomar múltiples valores según la naturaleza del dato. Un ejemplo muy común es conocer la función **V(t)** que representa la **velocidad** de una partícula versus el tiempo t. Se sabe que al calcular una primitiva de V(t) se obtiene la función **R(t)** que representa la **posición** de la partícula versus el tiempo.

La **constante de integración** representará el valor de la posición inicial, es decir en el instante t = 0.

De igual manera, si se conoce la función **A(t)** que representa la **aceleración** de la partícula versus el tiempo. La primitiva de A(t) resultará en la función V(t), donde la **constante de integración** será el valor de la velocidad inicial V_0.

En la **economía**, al obtener mediante integración la primitiva de una función de costos. La **constante de integración** representará los costos fijos. Y así muchas otras aplicaciones que ameritan cálculo diferencial e integral.

¿Cómo se calcula la constante de integración?

Para el cálculo de la **constante de integración,** siempre será necesario conocer las **condiciones iniciales**. Las cuales son las encargadas de definir cuál de las posibles primitivas es la correspondiente.

En muchas aplicaciones se trata como variable independiente al tiempo (t), donde la constante **C** toma los valores que definen las **condiciones iniciales** del caso en particular.

Si se toma el ejemplo inicial: $\int(2x+1)dx = x^2 + x + \mathbf{C}$

Una condición inicial válida puede ser condicionar a que la gráfica pase por una coordenada especifica. Por ejemplo, se sabe que la primitiva ($x^2 + x + \mathbf{C}$) pasa por el punto (1 , 2)

$F(x) = x^2 + x + \mathbf{C}$ **; esta es la solución general**

$F(1) = 2$

Sustituimos la solución general en esta igualdad

$F(1) = (1)^2 + (1) + C = 2$

De donde fácilmente se deduce que $\mathbf{C = 0}$

De esta forma la primitiva correspondiente para este caso es $\mathbf{F(x) = x^2 + x}$

Existen diversos tipos de ejercicios numéricos que trabajan con **constantes de integración**. De hecho el cálculo diferencial e integral no deja de aplicarse en las investigaciones vigentes. En distintos niveles académicos se pueden encontrar; desde cálculo inicial, pasando por física, química, biología, economía, entre otros.

También se aprecia en el estudio de **ecuaciones diferenciales**, donde la **constante de integración** puede tomar diversos valores y soluciones, esto debido a las múltiples derivaciones e integraciones que en esta materia se realizan.

Ejemplos

Ejemplo 1

1. Un cañón ubicado a 30 metros de altura dispara verticalmente hacia arriba un proyectil. Se conoce que la velocidad inicial del proyectil es de 25 m/s. Determinar:

- La función que define la posición del proyectil respecto al tiempo.
- El tiempo de vuelo o instante de tiempo en que la partícula toca el suelo.

Se sabe que en un movimiento rectilíneo uniformemente variado la aceleración es un valor constante. Este es el caso del lanzamiento de proyectil, donde la aceleración será la gravedad

$g = -10\ m/s^2$

También se conoce que la aceleración es la segunda derivada de la posición, lo que indica una doble integración en la resolución del ejercicio, obteniéndose así dos **constantes de integración.**

$A(t) = -10$

$V(t) = \int A(t)dt = \int (-10t)\ dt = -10t + \mathbf{C_1}$

Las condiciones iniciales del ejercicio indican que la velocidad inicial es V_0 = 25 m/s. Esta es la velocidad en el instante de tiempo t = 0. De esta forma se cumple que:

$V(0) = 25 = -10(0) + \mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_1} = 25$

Quedando definida la función velocidad

$V(t) = -10t + 25$; Se puede observar la similitud con la fórmula de MRUV ($V_f = V_0 + a \times t$)

De manera homóloga se procede a integrar la función velocidad para conseguir la expresión que define a la posición:

$R(t) = \int V(t)dt = \int(-10t+25)dt = -5t^2 + 25t + \mathbf{C_2}$

$R(t) = -5t^2 + 25t + \mathbf{C_2}$ **(primitiva de la posición)**

Se conoce la posición inicial R(0) = 30 m. Luego se calcula la primitiva particular del proyectil.

$R(0) = 30m = -5(0)^2 + 25(0) + \mathbf{C_2}$. Donde $\mathbf{C_2} = 30$

Queda resuelto el primer apartado desde que ***$R(t) = -5t^2 + 25t + 30$;*** Esta expresión es homóloga de la fórmula de desplazamiento en MRUV $R(t) = R_0 + V_0t - gt^2/2$

Para el segundo apartado se debe resolver la ecuación cuadrática: $-5t^2 + 25t + 30 = 0$

Ya que esta condiciona a la partícula a llegar hasta el suelo (posición = 0)

$$\frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4(-5)30}}{2(-5)} = 6$$

Fuente: autor

En realidad la ecuación de 2do grado nos arroja 2 soluciones T:{6 , -1}. Se ignora el valor t = -1 debido a que se trata de unidades de tiempo cuyo dominio no incluye a los números negativos.

De esta manera se resuelve el segundo apartado donde el tiempo de vuelo es igual a 6 segundos.

Ejemplo 2

2. Hallar la primitiva f(x) que cumpla con las condiciones iniciales:

- $f''(x) = 4$; $f'(2) = 2$; $f(0) = 7$

Con la información de la segunda derivada $f''(x) = 4$ se comienza el proceso de antiderivación

$f'(x) = \int f''(x)dx$

$\int 4\, dx = 4x + C_1$

Luego, al conocer la condición $f'(2) = 2$ se procede:

$4(2) + C_1 = 2$

$C_1 = -6$ y $f'(x) = 4x - 8$

Se procede de igual manera para la segunda **constante de integración**

$f(x) = \int f'(x)dx$

$\int(4x - 8)dx = 2x^2 - 8x + C_2$

Se conoce la condición inicial $f(0) = 7$ y se procede:

$2(0)^2 - 8(0) + C_2 = 7$

$C_2 = 7$ y $\mathbf{f(x) = 2x^2 - 8x + 7}$

- $f''(x) = x^2$; $f'(0) = 6$; $f(0) = 3$

De manera similar al problema anterior definimos las primeras derivadas y la función original a partir de las condiciones iniciales.

$f'(x) = \int f''(x)dx$

$\int(x^2)\, dx = (x^3/3) + C_1$

Con la condición $f'(0) = 6$ se procede:

$(0^3/3) + C_1 = 6$; Donde $C_1 = 6$ y $f'(x) = (x^3/3) + 6$

Luego la segunda **constante de integración**

$f(x) = \int f'(x)dx$

$\int[(x^3/3) + 6]\, dx = (x^4/12) + 6x + C_2$

Se conoce la condición inicial $f(0) = 3$ y se procede:

$[(0)^4/12] + 6(0) + C_2 = 3$; Donde $C_2 = 3$

Se obtiene así la primitiva particular

$f(x) = (x^4/12) + 6x + 3$

Ejemplo 3

3. Definir las funciones primitivas dadas las derivadas y un punto de la gráfica:

- $dy/dx = 2x - 2$ Que pasa por el punto (3 , 2)

Es importante recordar que las derivadas se refieren a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado. Donde no es correcto asumir que la gráfica de la derivada toca el punto señalado, pues este pertenece a la gráfica de la función primitiva.

De esta forma expresamos la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$dy = (2x - 2)dx$ *; luego al aplicar los criterios de antiderivación se tiene:*

$\int dy = \int (2x - 2)dx$

$y = x^2 - 2x + C$

Aplicando la condición inicial:

$2 = (3)^2 - 2(3) + C$

$C = -1$

Se obtiene: ***$f(x) = x^2 - 2x - 1$***

- $dy/dx = 3x^2 - 1$ Que pasa por el punto (0 , 2)

Expresamos la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$dy = (3x^2 - 1)dx$ *; luego al aplicar los criterios de antiderivación se tiene:*

$\int dy = \int(3x^2 - 1)\,dx$

$y = x^3 - x + C$

Aplicando la condición inicial:

$2 = (0)^2 - 2(0) + C$

$C = 2$

Se obtiene: $f(x) = x^3 - x + 2$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

1. Hallar la primitiva f(x) que cumpla con las condiciones iniciales:

- $f''(x) = x$; $f'(3) = 1$; $f(2) = 5$
- $f''(x) = x + 1$; $f'(2) = 2$; $f(0) = 1$
- $f''(x) = 1$; $f'(2) = 3$; $f(1) = 10$
- $f''(x) = -x$; $f'(5) = 1$; $f(1) = -8$

Ejercicio 2

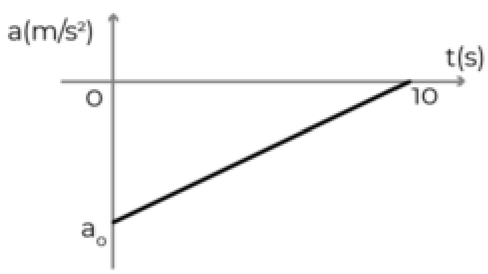
2. Un globo que asciende con velocidad de 16 pies/s suelta un saco de arena desde una altura de 64 pies sobre el nivel del suelo.

- Defina el tiempo de vuelo
- ¿Cuál será el vector V_f cuando toque el piso?

Ejercicio 3

3. La figura muestra la gráfica aceleración – tiempo de un auto que se mueve en el sentido positivo del eje x. El auto viajaba a una rapidez constante de 54 km/h cuando el conductor aplicó los frenos para detenerse en 10 segundos. Determine:

- La aceleración inicial del auto
- La velocidad del auto en t = 5s
- El desplazamiento del auto durante el frenado



Fuente: autor

Ejercicio 4

4. Definir las funciones primitivas dadas las derivadas y un punto de la gráfica:

- dy/dx = x   Que pasa por el punto (-1 , 4)
- dy/dx = $-x^2 + 1$ Que pasa por el punto (0 , 0)
- dy/dx = -x + 1   Que pasa por el punto (-2 , 2)

El cálculo diferencial e integral

El cálculo diferencial e integral es la matemática del cambio, de la variación, de la transformación.

El cálculo es la herramienta matemática apropiada para estudiar el movimiento de un objeto bajo la acción de una o varias fuerzas, o un fenómeno de crecimiento o decrecimiento.

Podemos hablar de dos partes muy vinculadas entre sí: *el cálculo diferencial* y *el cálculo integral.*

El cálculo diferencial estudia la forma y rapidez con que se producen los cambios, los valores que deben tomar ciertas variables para que los resultados sean óptimos, etc.

Aporta técnicas sencillas para el estudio de temas de fundamental importancia dentro de las distintas ramas de la matemática, física, química, economía, etc.

Por ejemplo:

· en geometría analítica; permite determinar las ecuaciones de la recta tangente y normal a una curva en un punto.

· en física; definir la velocidad instantánea y aceleración.

· en química; definir la velocidad de reacción.

· en economía; definir tasa de variación.

· Permite el cálculo de límites indeterminados.

· permite estudiar funciones mediante el cual podemos obtener sus gráficas.

- permite calcular errores.

El cálculo integral permite resolver el problema de determinar una función a partir de información sobre la rapidez con que cambia, calcular el área de la figura encerrada por una curva, determinar el trabajo realizado por una fuerza variable, hallar áreas, volúmenes, etc.