MATEMATICAS 1 Y 2

PLANTEL: LOSREYES

PROFESOR: FERNANDO INZUA

Introducción al Álgebra

El Álgebra es muy divertida – ¡puedes resolver acertijos con ella!

Un Acertijo

¿Cuál es el número que falta?

$$\square \quad - \quad 2 \quad = \quad 4$$

Bueno pues, la respuesta es 6, ¿no? Porque 6-2=4.

Bien, en Álgebra no usamos espacios vacíos o cajas sino que usamos una letra (normalmente una x o una y, pero cualquier letra está bien). Entonces escribiríamos:

$$x \quad - \quad 2 \quad = \quad 4$$

Es así de sencillo. La letra (en este caso una x) sólo quiere decir "aún no lo sabemos" y se la llama frecuentemente **incógnita** o **variable**.

Y una vez que la resuelves, escribes:

$$x \quad = \quad 6$$

¿Por qué usar una letra?

Porque:

- es más fácil escribir “x” que dibujar cajitas vacías (y más fácil decir “x” que “caja vacía”)
- si hubiera muchas cajitas vacías (muchas “incógnitas”) podríamos utilizar una letra diferente para cada una.

Cómo Resolver

El álgebra es como un acertijo donde empiezas con algo como “x-2=4” y quieres llegar a algo como “x=6”.

Pero en lugar de decir “obviamente x=6”, usa el siguiente método paso a paso:

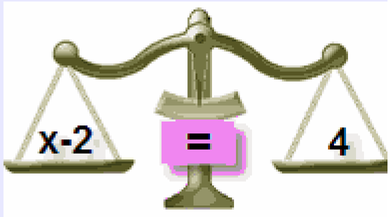
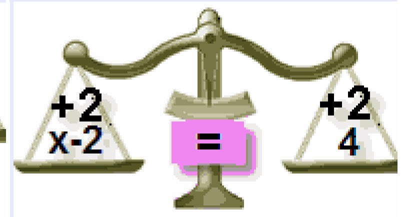
- Piensa qué es **lo que debes quitar** para llegar a “x=...”
- Quítalo **haciendo lo opuesto** (sumar es opuesto a restar)
- Esto último hazlo en **ambos lados**

Aquí tienes un ejemplo:

Queremos quitar el “-2”	Para quitarlo, **haz lo opuesto**, en este caso suma 2	Hazlo en **ambos lados**:	Lo cual es ...	***¡Resuelto!***
$x - 2 = 4$	$x - 2 = 4$ $+2$ 0	$x - 2 = 4$ $+2 \quad +2$ $0 \quad 6$	$x + 0 = 6$	$x = 6$

¿Por qué agregamos 2 a ambos lados?

Para “mantener el equilibrio”...

	Agrega 2 a la izquierda	Agrega 2 a la derecha también
		
Equilibrada	**¡Desequilibrada!**	Equilibrada de nuevo

Acuérdate de esto:

> Para mantener el equilibrio, ¡lo que se hace a **un lado** del "=" también debe hacerse al **otro lado**!

Otro Acertijo

Resuelve éste:

$$x \quad + \quad 5 \quad = \quad 12$$

Comienza con:	$x + 5 = 12$
Lo que estás buscando es una respuesta como "x=…" ¡y el +5 está molestando! Si restas 5, puedes cancelar el +5 (porque 5-5=0)	
Entonces, intentemos restar 5 en **ambos lados**:	$x+5 \mathbf{-5} = 12 \mathbf{-5}$
Un poquito de aritmética (5-5=0 y 12-5=7) da como resultado:	$x+0 = 7$
Lo cual es simplemente:	$\mathbf{x = 7}$
	¡Resuelto!
(chequeo rápido: 7+5=12)	

El orden de las operaciones - *PEMDAS*

Operaciones

Las ***"operaciones"*** son por ejemplo sumar, restar, multiplicar, dividir, calcular el cuadrado, etc. Si algo no es un número entonces probablemente es una operación.

Pero, cuando ves algo como...

$$7 + (6 \times 5^2 + 3)$$

... qué parte tendrías que calcular primero?

¿Empiezas por la izquierda y vas hacia la derecha?
¿O de derecha a izquierda?

Atención: ¡Si lo calculas en el orden equivocado, tendrás una respuesta equivocada!

Así que hace tiempo la gente se puso de acuerdo en seguir algunas reglas para hacer cálculos, y son:

El orden de las operaciones

Primero haz las cosas entre paréntesis. Ejemplo:

✓	$6 \times (5 + 3)$	=	6×8	=	**48**	
✗	$6 \times (5 + 3)$	=	$30 + 3$	=	33	(mal)

Exponentes (potencias, raíces) antes que multiplicaciones, divisiones, adiciones o sustracciones. Ejemplo:

✓	5×2^2	=	5×4	=	**20**	
✗	5×2^2	=	10^2	=	100	(mal)

Multiplicar o dividir va antes que sumar o restar. Ejemplo:

✓ $2 + 5 \times 3 \quad = \quad 2 + 15 \quad = \quad \mathbf{17}$

✗ $2 + 5 \times 3 \quad = \quad 7 \times 3 \quad = \quad 21$ (mal)

Aparte de eso se va de izquierda a derecha. Ejemplo:

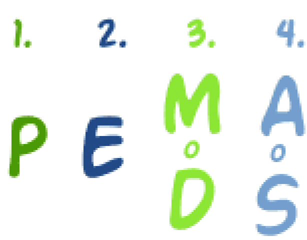
✓ $30 \div 5 \times 3 \quad = \quad 6 \times 3 \quad = \quad \mathbf{18}$

✗ $30 \div 5 \times 3 \quad = \quad 30 \div 15 \quad = \quad 2$ (mal)

¿Cómo me puedo acordar? ¡PEMDAS!

P	**P**aréntesis primero
E	**E**xponentes (potencias y raíces cuadradas, etc.)
MD	**M**ultiplicación y **D**ivisión (de izquierda a derecha)
AS	**A**dición y **S**ustracción (de izquierda a derecha)

Nota: multiplicar y dividir están al mismo nivel. Sumar y restar están al mismo nivel.



Después de hacer "P" y "E", sólo ve de izquierda a derecha haciendo las "M" ***o*** "D" cuando te encuentres una.

Entonces ve de izquierda a derecha haciendo las "A" ***o*** "S" cuando las encuentres.

Nota: no hace falta que te aprendas PEMDAS si no quieres, lo importante es que te aprendas el orden de las operaciones correctamente.

Ejemplos

Ejemplo: ¿Cómo calculas **3 + 6 × 2** ?
Multiplicación antes que **A**dición:
Primero **6 × 2 = 12**, después **3 + 12 = 15**

Ejemplo: ¿Cómo calculas **(3 + 6) × 2** ?
Paréntesis primero:
Primero **(3 + 6) = 9**, después **9 × 2 = 18**

Ejemplo: ¿Cómo calculas **12 / 6 × 3** ?
Multiplicación y **D**ivisión están al mismo nivel, ve de izquierda a derecha:
Primero **12 / 6 = 2**, después **2 × 3 = 6**

Ah, sí, ¿y qué pasa con **7 + (6 × 5^2 + 3)**?

7 + (6 × 5^2 + 3)	
7 + (6 × 25 + 3)	Empieza dentro del *paréntesis*, y después haz los *exponentes* primero
7 + (150 + 3)	Después *multiplica*
7 + (153)	Después *suma*
7 + 153	*Paréntesis* hecho, la última operación es una *suma*
160	¡HECHO!

Inténtalo Tú Mismo

Ejercicios

1:

x+9 = 11

2:

x-10 = 0

3:

x+7 = 17

4:

2+x = 8

5:

9+x = 16

6:

x+5 = 13

7:

-9+x = -2

8:

x+7 = 9

9:

x-9 = -7

10:

-10+x = 0

Multiplicación

¿Cuál es el número que falta?

$$\square \times 4 = 8$$

La respuesta es 2, ¿verdad? Porque 2 × 4 = 8.

Bueno, en álgebra no se usan cuadros en blanco, se usan **letras**. Así que podemos escribir:

$$x \times 4 = 8$$

¡Pero la letra "X" se parece al "×"! ... eso puede confundirnos... así que en álgebra no se usa el signo de multiplicar (×) entre números y letras, sólo hay que **poner el número al lado de la letra para indicar una multiplicación**:

$$4x = 8$$

En español lo dirías "cuatro equis es igual a ocho", lo que quiere decir que 4 x's hacen 8. Y la respuesta la escribirías:

$$x = 2$$

Cómo resolver

- Averigua **qué tienes que quitar** para conseguir "x = ..."
- Quítalo **haciendo lo contrario**
- Haz eso **en los dos lados**

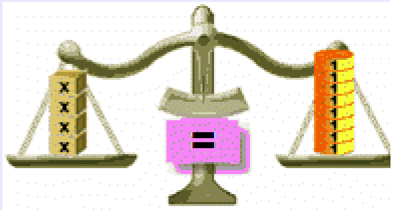
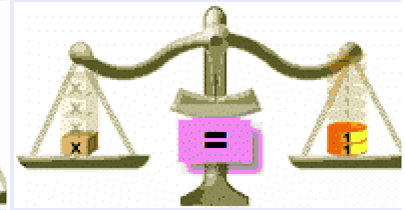
Eso también funciona aquí, pero lo que te hace falta saber es que **dividir es lo contrario de multiplicar**. Mira este ejemplo:

Queremos quitar el "4"	Para quitarlo, **haz lo opuesto**, en este caso divide entre 4:	Hazlo **en los dos lados**:	Eso es ...	***¡Resuelto!***
$4x = 8$	$4x = 8$ $\div 4$ 1	$4x = 8$ $\div 4 \quad \div 4$ $1 \quad 2$	$1x = 2$	$x = 2$

¿Por qué hemos dividido entre 4 en los dos lados?

Porque hace falta equilibrio...

	Divide a la izquierda entre 4	Divide también a la derecha entre 4

		
En equilibrio	**¡Desequilibrado!**	En equilibrio otra vez

Sólo recuerda...

Para mantener el equilibrio, ¡lo que hagas **a un lado** del "="
tienes que hacerlo también **al otro lado**!

Resuelve este:

$$x \;/\; 3 \;=\; 5$$

Empieza por:	$x/3 = 5$
Lo que tienes que conseguir es una respuesta como "x = ...", ¡y el *divide entre 3* te estorba! Si *multiplicas por 3* puedes cancelar el *dividir entre 3* (porque 3/3=1)	
Así que vamos a probar a multiplicar por 3 **en los dos lados**:	$x/3 \boldsymbol{\times 3} = 5 \boldsymbol{\times 3}$
Un poco de aritmética (3/3 = 1 y 5×3 = 15) nos da:	$1x = 15$
Y esto es:	$\mathbf{x = 15}$

	¡Resuelto!
(Comprobación rápida: 15/3 = 5)	

Prueba tú ahora

Ahora prueba con esta hoja de ejercicios de multiplicación algebraica y comprueba tus respuestas en la página de después. ¡Intenta usar los pasos que te hemos enseñado, en lugar de adivinar!

Un ejemplo más complicado

¿Cómo resolverías este?

$$x \;/\; 3 \;+\; 2 \;=\; 5$$

Parece difícil, pero no lo es si lo resuelves **paso a paso**.

Primero quitaremos el "+2":

Empieza por:	$x/3 + 2 = 5$
Para quitar el *más 2* usa *menos 2* (porque 2-2=0)	$x/3 + 2$ **-2** $= 5$ **-2**
Un poco de aritmética (2-2 = 0 y 5-2 = 3) nos da:	$x/3 + 0 = 3$
Y esto es:	$x/3 = 3$

Ahora quitamos el "/3":

Empieza por:	$x/3 = 3$

Si *multiplicas por 3* puedes cancelar el *dividir entre 3*	x/3 **×3** = 3 **×3**
Un poco de aritmética (3/3 = 1 y 5×3 = 15) nos da:	1x = 9
Y esto es:	**x = 9**
	¡Resuelto!
(Comprobación rápida: 9/3 + 2 = 3+2 = 5)	

Cuando tengas más experiencia:

Cuando tengas más experiencia, podrás resolverlo así:

Empieza por:	x/3 + 2 = 5
Resta 2 de los dos lados:	x/3 + 2 **-2** = 5 **-2**
Simplifica:	x/3 = 3
Multiplica por 3 en los dos lados:	x/3 **×3** = 3 **×3**
Simplifica:	**x = 9**

O incluso así:

Empieza por:	x/3 + 2 = 5
Resta 2:	x/3 = 3

Multiplica por 3:	**x = 9**

Inténtalo Tú Mismo

Ejercicios

1: 10x+7 = 37

2: 7+5x = 37

3: 9x-8 = 55

4: 4x+32 = 40

5: 3x-10 = 20

6: -3+7x = 18

7: 8x-3 = 69

8: 36+9x = 117

9: 7x+9 = 65

10: 9x-27 = 54

Álgebra - Sustituciones

"Sustituir" significa poner algo en lugar de otra cosa.

Sustitución

En álgebra "sustitución" significa poner números donde hay letras:

Si tienes:	$x - 2$
Y sabes que **x=6** ...	
... entonces puedes "sustituir" **6** por **x**:	$6 - 2 = 4$

Ejemplo 1: si x=5 y y=3, ¿cuánto es **10/x + 2y** ?

Pon "5" donde esté la "x", y "3" donde esté la "y": **10/5 + 2×3 = 2 + 6 = 8**

Ejemplo 2: Si x=3 y y=4, ¿cuánto es $x^2 + xy$?

Pon "3" donde esté la "x", y "4" donde esté la "y": $3^2 + 3 \times 4 = 9 + 12 = 21$

Ejemplo 3: Si x=3 (pero no conoces "y"), ¿cuánto es $x^2 + xy$?

Pon "3" donde esté la "x": $3^2 + 3y = 9 + 3y$ (esto es todo lo que puedes hacer)

Y como muestra este último ejemplo, no siempre tendrás un número como respuesta, a veces sólo una fórmula más simple.

Ecuaciones y fórmulas

Qué es una ecuación

Una ecuación dice que dos cosas son iguales. Tendrá un signo de igualdad "=", por ejemplo:

$$x + 2 = 6$$

Lo que la ecuación dice: **lo que está a la izquierda (x + 2) es igual que lo que está en la derecha (6)**

Así que una ecuación es como una **afirmación** "*esto* es igual a *aquello*"

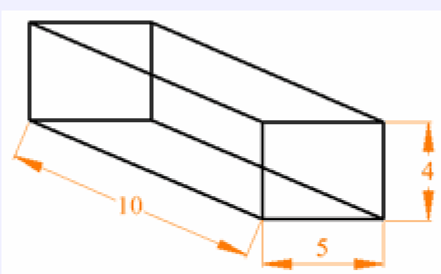
Qué es una fórmula

Una fórmula es un tipo especial de ecuación que muestra la relación entre diferentes **variables** (una variable es un símbolo que representa un número que no conocemos todavía).

Ejemplo: La fórmula para calcular el volumen de una caja es

V = lpa

V significa volumen, l longitud, p profundidad y a altura.



Si l=5, p=10 y a=4, entonces **V = 5×10×4 = 200**

Una fórmula tiene **más de una variable**.

Todas estas son ecuaciones, pero sólo algunas son fórmulas:

x = 2**y** - 7	Fórmula (que relaciona **x** e **y**)
$a^2 + b^2 = c^2$	Fórmula (que relaciona **a**, **b** y **c**)

x/2 + 7 = 0	No es una fórmula (sólo una ecuación)

Sin el igual

A veces una fórmula se escribe sin el "=":

Ejemplo: la fórmula para el volumen de una caja es:

lpa

Pero de alguna manera el "=" está allí, porque podrías haber escrito **V = lpa** si hubieras querido.

Sujeto de una fórmula

El "sujeto" de una fórula es la variable sola (normalmente a la izquierda del "=") que es igual a todo lo demás.

Ejemplo: en la fórmula

$$s = vt + \tfrac{1}{2} at^2$$

"s" es el sujeto de la fórmula

Cambiar el sujeto

Una de las cosas más poderosas que puede hacer el Álgebra es "transformar" una fórmula para que otra variable sea el sujeto.

Transformar la fórmula del volumen de una caja (**V = lpa**) para que la longitud sea el sujeto:

EMpieza por:	**V = lpa**
divide los dos lados entre p:	**V / p = la**
divide los dos lados entre a:	**V / pa = l**
intercambia los lados:	**l = V / pa**

Así que si tienes una caja con profundidad 2m, altura 2m y volumen $12m^3$, puedes calcular su longitud:

l = V / pa

l = $12m^3$ / (2m×2m) = 12/4 = 3m

Álgebra - Definiciones básicas

Qué es una ecuación

Una ecuación dice que dos cosas son iguales. Tendrá un signo de igualdad "=", por ejemplo:

$$x \quad + \quad 2 \quad = \quad 6$$

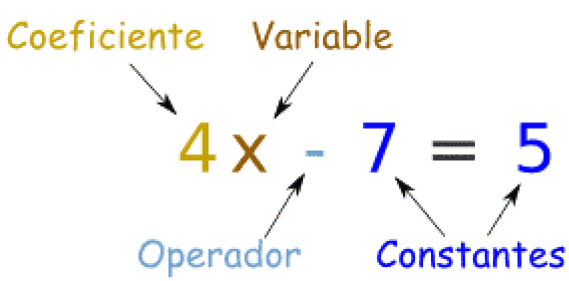
Lo que esta ecuación dice: **lo que está a la izquierda (x + 2) es igual que lo que está en la derecha (6)**

Así que una ecuación es como una **afirmación** "*esto* es igual a *aquello*"

Partes de una ecuación

Para que la gente pueda hablar de ecuaciones, hay nombres para las diferentes partes (¡mejor que decir "esta cosa de aquí"!)

Aquí tienes una ecuación que dice 4x-7 es igual a 5, y todas sus partes:

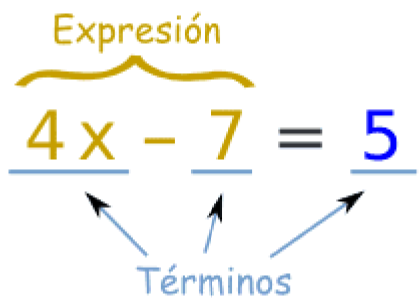


Una **variable** es un símbolo para un número que todavía no conocemos. Normalmente es una letra como x o y.

Un número solo se llama una **constante**.

Un **coeficiente** es un número que está multiplicando a una variable (4x significa 4 por x, así que 4 es un coeficiente)

Un **operador** es un símbolo (como +, ×, etc) que representa una operación (es decir, algo que quieres hacer con los valores).

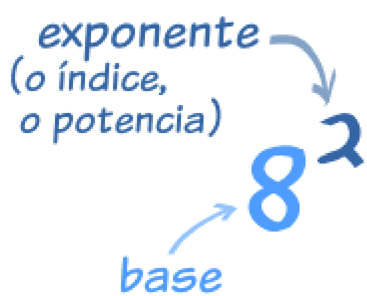


Un **término** es o bien un número o variable solo, o números y variables multiplicados juntos.

Una **expresión** es un grupo de términos (los términos están separados por signos + o -)

Ahora podemos decir cosas como "esa expresión sólo tiene dos términos", o "el segundo término es constante", o incluso "¿estás seguro de que el coeficiente es 4?"

¡Exponente!



El exponente (como el 2 en x^2) dice **cuántas veces** usar el valor en una multiplicación.

Ejemplos:
$8^2 = 8 \times 8 = 64$
$y^3 = y \times y \times y$
$y^2z = y \times y \times z$

Los exponentes hacen más fácil escribir y usar muchas multiplicaciones

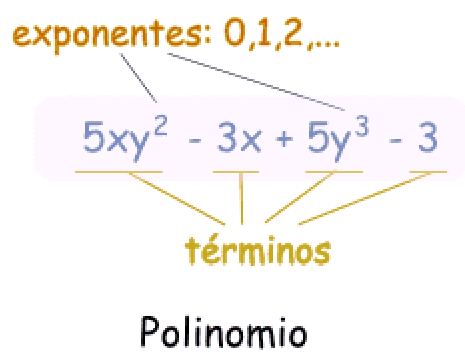
Ejemplo: **y^4z^2** es más fácil que **$y \times y \times y \times y \times z \times z$**, o incluso **yyyyzz**

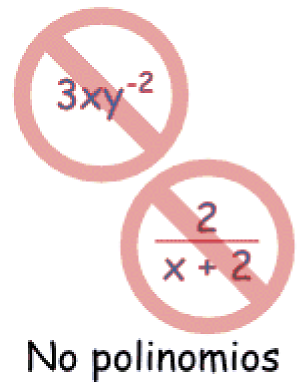
Polinomio

Un ejemplo de un polinomio: **$3x^2 + x - 2$**

Un polinomio puede tener **constantes**, **variables** y los **exponentes 0,1,2,3,...**

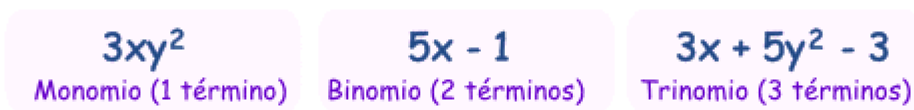
Y se puede combinar haciendo sumas, restas y multiplicaciones... **¡pero no divisiones!**





Monomio, binomio, trinomio

Hay nombres especiales para polinomios con 1, 2 o 3 términos:



Términos similares

"Términos similares" son **términos** cuyas variables (y sus exponentes como el 2 en x^2) son los mismos.

En otras palabras, términos que "se parecen". (Nota: los **coeficientes** pueden ser distintos)

Ejemplos:

Términos				Por qué son "similares"
	7x	x	-2x	porque las variables son todas **x**
	$(1/3)xy^2$	$-2xy^2$	$6xy^2$	porque las variables son todas $\mathbf{xy^2}$

Puedes sumar los **términos similares** para hacer un solo término:

Ejemplo: 7**x** + **x** = 8**x**

Términos no similares

Si no son términos similares, simplemente se les llama "**términos no similares**":

Términos				Por qué no son "similares"
	-3xy	-3y	$12y^2$	← estos son **términos no similares** (**xy**, **y** e **y^2** son todos diferentes)